ZUR ERKLÄRUNG DER BOGENLÄNGE UND DES INHALTES EINER KRUMMEN FLÄCHE*

VON

O. STOLZ

1. Dass die Zahl, welche nach Festsetzung der Längeneinheit einer begrenzten krummen Linie zuzuordnen ist, der Erklärung bedürfe, ist allgemein anerkannt. Es ist übrigens die Aufstellung einer solchen Erklärung ziemlich naheliegend. Denken wir uns z. B. für jeden Werth von x im endlichen Intervalle (a, b) eine reelle Function $y = f(x)$ eindeutig definirt und xy als rechtwinkliche Coordinaten in der Ebene construirt, so wird die Länge des von den Punkten

$$A \equiv \big(a, f(a)\big), \qquad B \equiv \big(b, f(b)\big),$$

begrenzten Bogens folgendermassen erklärt. Wir theilen $b - a$ in n Theile $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n$, sodass

$$\delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n = b - a$$

ist, und setzen $a = a_0$, $a_0 + \delta_1 = a_1$ u. s. f., allgemein $a_{r-1} + \delta_r = a_r$ und schliesslich $b = a_n = a_{n-1} + \delta_n$. Die den Absscissen $a_1 \cdots a_{n-1}$ entsprechenden Punkte des Bogens AB seien mit $A_1 \cdots A_{n-1}$ bezeichnet. Wenn alsdann

$$\sum_{r=1}^{n} |A_{r-1}A_r| = \sum_{r=1}^{n} \sqrt{\delta_r^2 + \{f(a_r) - f(a_{r-1})\}^2}$$

bei unbeschränkter und unbegrenzter Abnahme aller Theile $\delta_1 \cdots \delta_n$, deren Summe jedoch stets $b - a$ bleiben muss, einen endlichen Grenzwerth L besitzt d. h. *wenn es eine Zahl L von der Beschaffenheit giebt, dass jedem $\epsilon > 0$ eine positive Zahl Δ in der Art entspricht, dass wenn nur jede der Zahlen $\delta_1 \cdots \delta_n$, deren Summe $b - a$ ist, kleiner als Δ ist, dann stets*

$$(1) \qquad \Big| L - \sum_{r=1}^{n} \sqrt{\delta_r^2 + \{f(a_r) - f(a_{r-1})\}^2} \Big| < \epsilon,$$

ist †—so ordnen wir dem Bogen AB diese Zahl L zu.

* Presented to the Society October 26, 1901. Received for publication September 6, 1901.

† Der Kürze wegen bezeichnen wir diese Erklärung als "Erklärung (D)".—Aus ihr dürfte noch nicht hervorgehen, dass wenn C einen Punkt des Bogens AB zwischen A und B bezeichnet der Bogen AC ebenfalls rectificirbar sei.

Lassen wir die Function $f(x)$ in jedem Punkte x des Intervalles (a, b) mit Einschluss von $x = a$ und $x = b$ stetig sein und versehen sie in allen diesen Punkten mit einem vollständigen Differentialquotienten $f'(x)$, der ebenfalls bei jedem von ihnen stetig sein soll, so erfüllt das eigentliche bestimmte Integral

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx, \tag{2}$$

die oben an die Zahl L gestellte Bedingung, wie aus der Erklärung desselben unmittelbar hervorgeht. Das Nämliche gilt, wenn der wenigstens für alle x im Intervalle (a, b) mit Ausnahme eines Werthsystems 1. Gattung vorhandene vollständige Differentialquotient $f'(x)$ eine im Intervalle (a, b) endliche und integrirbare Function bildet.

2. Schwieriger gestaltet sich der Nachweis dieses Satzes schon in dem Falle, dass der Differentialquotient $f'(x)$ für alle Werthe x im Intervalle (a, b) mit Ausnahme eines der Endwerthe, etwa von $x = a$, stetig, dabei aber *in diesem Intervalle nicht endlich ist, während das Integral* (2) *einen Sinn hat.* Zunächst wird man folgendes bemerken.* Vermöge der Stetigkeit der Function $f(x)$ bei $x = a$ lässt sich der beliebig vorgegebenen Zahl $\epsilon/2$ eine positive Zahl δ so zuordnen, dass

$$|AM| = \sqrt{(x-a)^2 + \{f(x) - f(a)\}^2} < \frac{\epsilon}{2} \tag{3}$$

ist, wenn nur $0 < x - a < \delta$ ist. Wegen der Existenz des Integrals (2) dürfen wir ferner annehmen, dass unter der nämlichen Voraussetzung

$$0 < \int_a^x \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx < \frac{\epsilon}{2} \tag{4}$$

ist. Wir setzen nun $\delta_1 = \delta$. Dann ist zufolge der Ungleichungen (3) und (4)

$$-\frac{\epsilon}{2} < \int_a^{a_1} \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx - |AA_1| < \frac{\epsilon}{2} \qquad (a_1 = a + \delta). \tag{5}$$

Ist δ in dieser Weise festgelegt, so gehört nach dem oben Bemerkten zu $\epsilon/2$ eine solche positive Zahl κ, dass wenn nur die Theile $\delta_2, \delta_3, \cdots, \delta_n$ mit der Summe $(b - a) - \delta$ sämmtlich kleiner als κ sind, alsdann

$$0 < \int_{a_1}^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx - \sum_{r=2}^{n} |A_{r-1}A_r| < \frac{\epsilon}{2} \tag{6}$$

---

* Von mir bereits hervorgehoben, Mathematische Annalen, Bd. 18, S. 274, jedoch in die *Grundzüge der Differential- und Integralrechnung* (II, S. 310) nicht aufgenommen.

ist. Durch Addition der Beziehungen (5) und (6) findet man, dass unter den angegebenen Voraussetzungen über δ_1 einer- und $\delta_2 \cdots \delta_n$ andererseits

$$\left| \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx - \sum_{r=1}^{n} A_{r-1} A_r \right| < \epsilon \tag{7}$$

ist. Allein dieses Ergebniss deckt sich nicht völlig mit der Erklärung (D), indem hier nicht für alle Theile $\delta_1 \cdots \delta_n$ *eine* obere Grenze Δ erhalten wird, sondern erst nach Festsetzung von δ_1 für die übrigen Theile $\delta_2 \cdots \delta_n$ eine *von* δ_1 *abhängige* obere Grenze κ.

Will man die Gewissheit erlangen, dass das Integral (2) auch jetzt die in der Erklärung (D) an die Zahl L gerichtete Forderung befriedigt, so muss man noch nachweisen, dass für die Summe $\sum_r |A_{r-1} A_r|$ bei $\lim \delta_r = 0$ $(r = 1, \cdots, n)$ überhaupt ein endlicher Grenzwerth vorhanden ist.* Man hat demnach zu zeigen, dass jedem $\epsilon > 0$ ein $\Delta > 0$ so entspricht, dass wenn nur alle δ_r und alle δ'_r $(r = 1, 2, \cdots, n')$ kleiner als Δ sind, alsdann stets

$$\left| \sum_{r=1}^{n} |A_{r-1} A_r| - \sum_{r=1}^{n'} |A'_{r-1} A'_r| \right| < \epsilon$$

ist. Dazu könnte, im Falle dass der Bogen AB convex ist, meine Entwickelung in den Mathematischen Annalen, Bd. 28, S. 271 dienen. Dieser Grenzwerth muss zufolge der Beziehung (7) das Integral (2) sein.

3. Die in der vorigen Nr. angedeutete Entwickelung lässt sich dadurch umgehen, dass man für die dort betrachtete Curve eine andere analytische Darstellung verwendet. Man wird es leicht so einrichten können, dass x und y als eindeutige Functionen eines Parameters t

$$x = \phi(t), \quad y = \psi(t) \qquad (\alpha \leqq t \leqq \beta), \tag{a}$$

erscheinen und zwar als für alle Werthe von t im endlichen Intervalle (α, β) stetige Functionen, welche, etwa abgesehen von einer endlichen Anzahl von diesen Werthen, für jeden von ihnen vollständige und zwar stetige Differentialquotienten $\phi'(t)$ $\psi'(t)$ besitzen, welche im genannten Intervalle endlich sind.

---

* Da die Summen $\sum_r |A_{r-1} A_r|$ endlich sind (nämlich unter der Zahl

$$M + \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx,$$

worin M den grössten Abstand der Punkte des Bogens AB von seinem Anfangspunkte A bedeutet, liegen), so könnten sie bei $\lim \delta_r = 0$ $(r = 1, \cdots, n)$ auch zwei positive, von einander verschiedene Unbestimmtheitsgrenzen haben.

Die Erklärung der Länge des durch die Gleichungen (a) dargestellten Bogens AB ist die unmittelbare Verallgemeinerung der Erklärung (D). Indem wir jetzt

$$\beta - \alpha = \delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n,$$

$$\alpha + \delta_1 = \alpha_1, \quad \alpha_1 + \delta_2 = \alpha_2, \cdots, \quad \alpha_{n-1} + \delta_n = \alpha_n = \beta$$

und

$$\sqrt{[\phi(\alpha_r) - \phi(\alpha_{r-1})]^2 + [\psi(\alpha_r) - \psi(\alpha_{r-1})]^2} = |A_{r-1}A_r|$$

setzen, so heisst L die Zahl des genannten Bogens, falls jedem $\epsilon > 0$ ein $\Delta > 0$ so zugeordnet werden kann, dass stets

$$(b) \qquad \left| L - \sum_{r=1}^{n} |A_{r-1}A_r| \right| < \epsilon$$

ausfällt, wenn nur eine jede Strecke $\delta_1 \cdots \delta_n$ kleiner als Δ ist.

Wir haben gezeigt,* dass wenn $\phi'(t)$ $\psi'(t)$ bei jedem Werthe des Intervalls (α, β), $t = \alpha$ und $t = \beta$ also eingeschlossen, stetig ist, alsdann das Integral

$$(c) \qquad \int_\alpha^\beta \sqrt{\phi'(\tau)^2 + \psi'(\tau)^2}\, d\tau \quad (= J)$$

die soeben hinsichtlich der Zahl L aufgestellte Bedingung erfüllt. Dieser Beweis lässt sich jedoch nicht auf den Fall ausdehnen, dass $\phi'(t)$ und $\psi'(t)$ unbeschadet ihrer Endlichkeit im Intervalle (α, β) Unstetigkeiten für einzelne Werthe desselben erleiden.†

Es giebt indess ein sehr bequemes Verfahren, den Satz, dass das Integral (c) die Länge des Curvenbogens (a) sei, in den beiden soeben erwähnten Fällen zu begründen.‡ Wir wollen dasselbe in Folgendem etwas eingehender auseinandersetzen.

4. *Satz.* „*Es sei $f(x_1 x_2 \cdots x_k)$ eine für jedes System von Werthen $x_1 x_2 \cdots x_k$, wovon*

$$(1) \qquad \alpha \leqq x_1 \leqq \beta, \quad \alpha \leqq x_2 \leqq \beta, \cdots, \alpha \leqq x_k \leqq \beta$$

ist, eindeutige und für diesen Bereich endliche Function von $x_1 \cdots x_k$. Wir schalten zwischen α und β die $n - 1$ Werthe $\alpha_1 \cdots \alpha_{n-1}$ ein und setzen

$$\alpha_r - \alpha_{r-1} = \delta_r \qquad (r = 1, 2, \cdots, n),$$

wobei $\alpha_0 = \alpha$, $\alpha_n = \beta$ sein soll. Versteht man dann unter f_r irgend einen Werth zwischen der oberen und unteren Grenze von $f(x_1 x_2 \cdots x_k)$ unter der Vor-

* Vgl. *Grundzüge* u. s. w., II, S. 314.

† A. a. O. ist die Giltigkeit dieses Beweises für den zuletzt erwähnten Fall in Folge eines Rechenfehlers fälschlich behauptet.

‡ Angedeutet ist es Mathematische Annalen, Bd. 18, S. 274; *Grundzüge*, II, S. 316, Note.

aussetzung dass $x_1 x_2 \cdots x_k$ je einen beliebigen Werth im Intervalle (a_{r-1}, a_r) bedeuten (diese Grenzen selbst eingeschlossen) und hat $\sum_r f_r \delta_r$ bei lim $\delta_r = 0$ $(r = 1, 2, \cdots, n)$ *einen endlichen Grenzwerth* J, *so ist die Function* $f(t\,t \cdots t)$ *im Intervalle* (a, β) *integrirbar und zwar ist*

$$\int_a^\beta f(t\,t \cdots t)\,dt = J.\text{"}$$

Der Satz ist selbstverständlich; denn man darf unter den angegebenen Umständen auch

$$\text{(1*)} \qquad \mathop{\mathrm{L}}_{\delta_r = 0} \sum_{r=1}^{n} f(x_r x_r \cdots x_r)\,\delta_r = J$$

setzen, unter x_r einen beliebig im Intervalle (a_{r-1}, a_r) zu wählenden Werth verstanden.

5. Es erhebt sich nunmehr die Frage, unter welchen Umständen die genannte Summe $\sum_r f_r \delta_r$ bei lim $\delta_r = 0$ einen endlichen Grenzwerth J besitzt d. h. es eine Zahl J von der Beschaffenheit gibt, dass jedem $\epsilon > 0$ ein $\Delta > 0$ so entspricht, dass wenn nur jeder der Theile $\delta_1 \cdots \delta_n$, deren Summe $\beta - a$ ist, kleiner als Δ ist, dann stets

$$\left| J - \sum_{r=1}^{n} f_r \delta_r \right| < \epsilon$$

ist.—Bezeichnen wir die obere und untere Grenze von $f(x_1 x_2 \cdots x_k)$ im Bereiche

$$\text{(2)} \qquad a_{r-1} \leqq x_1 \leqq a_r, \quad a_{r-1} \leqq x_2 \leqq a_r, \ \cdots, \ a_{r-1} \leqq x_k \leqq a_r$$

bezw. mit $g_r\ k_r$, so soll $g_r \geqq f_r \geqq r_r$ sein, so dass

$$\text{(3)} \qquad \sum_{r=1}^{n} g_r \delta_r \geqq \sum_{r=1}^{n} f_r \delta_r \geqq \sum_{r=1}^{n} k_r \delta_r$$

ist.

Die Summe $\sum_r g_k \delta_r$ *hat nun bei* lim $\delta_r = 0$ $(r = 1, \cdots, n)$ *einen endlichen Grenzwerth* G. Dies ergiebt sich genau auf die nämliche Weise, wie die Existenz des oberen Integrals einer im Intervalle (a, β) von x eindeutigen und endlichen Function von x.* In der That bestehen die drei folgenden Sätze:

1) Betrachten wir zunächst nun *ein* unendliches System solcher Theilungen $\mathfrak{T}_1 \mathfrak{T}_2 \cdots \mathfrak{T}_m \cdots$ des Unterschiedes $\beta - a$, dass kein Theil von $\mathfrak{T}_m$ in zwei benachbarten Theilen von $\mathfrak{T}_{m-1}$ liegt, und dabei, wenn nur m gross genug genommen wird, jeder zu $\mathfrak{T}_m$ gehörige Theil kleiner als eine vorgegebene Zahl Δ ausfällt, und bezeichnen die zur Theilung $\mathfrak{T}_m$ gehörige Summe $\sum_r g_r \delta_r$ mit Σ_m, so nimmt Σ_m mit wachsendem m nicht zu und hat daher bei lim $m = +\infty$ einen endlichen Grenzwerth G.

---

* Vgl. des Verfassers *Grundzüge* I, S. 353; III, S. 264.

2) Wird $\beta - \alpha$ auf irgend eine Weise in n Theile $\delta_1 \cdots \delta_n$ zerlegt, *so ist* $\sum_r g_r \delta_r$ *nicht kleiner als die in* 1) *eingeführte Zahl* G.

3) Diese Zahl G ist der Grenzwerth von $\sum_r g_r \delta_r$ bei $\lim \delta_r = 0$ $(r = 1, \cdots, n)$ d. h. jedem $\epsilon > 0$ lässt sich ein $\Delta > 0$ so zuordnen, dass, wenn nur ein jeder der Theile δ_r, deren Summe $\beta - \alpha$ ist, kleiner als Δ ist, dann stets

$$0 \leqq \sum_{r=1}^{n} g_r \delta_r - G < \epsilon$$

ist.

Auf die gleiche Weise ergiebt sich, dass die Summen $\sum_r k_r \delta_r$ bei $\lim \delta_r = 0$ $(r = 1, \cdots, n)$ einen endlichen Grenzwerth K hat, welcher zu Folge der Beziehungen (3) nicht grösser als G sein kann.

Dazu dass die Summe $\sum_r f_r \delta_r$ bei willkürlicher Annahme der Zahlen f_r innerhalb der Grenzen k_r und g_r für die unabhängig von einander zur Null convergirenden Strecken $\delta_1 \cdots \delta_n$ *einen und derselben endlichen Grenzwerth* J *besitze, ist nothwendig und hinreichend*, dass $G = K$ oder

$$\text{(3*)} \qquad \mathop{\mathrm{L}}_{\delta_r = 0} \sum_{r=1}^{n} (g_r - k_r)\,\delta_r = 0$$

ist. Alsdann ist $J = G = K$. Dies folgt aus den Beziehungen (3) unmittelbar.

Wenn die Function $f(x_1 \cdots x_k)$ *für jedes System* $x_1 x_2 \cdots x_k$ *im Bereiche* (1) *stetig ist*, so existirt für $\sum_r f_r \delta_r$ bei $\lim \delta_r = 0$ $(r = 1, \cdots, n)$ *ein* Grenzwerth J. Unter dieser Voraussetzung besteht nämlich die Gleichung (3*), wie sich aus der sogenannten gleichmässigen Stetigkeit der Function $f(x_1 \cdots x_k)$ im Bereiche (1) d. i. aus dem Satze; „Jedem $\epsilon > 0$ entspricht ein $\Delta > 0$ so dass

$$|f(x_1' \cdots x_k') - f(x_1 \cdots x_k)| < \epsilon$$

ist, wenn nur $x_1 \cdots x_k$ und $x_1' \cdots x_k'$ zwei Stellen des Bereiches (1) bedeuten, wofür jede der Differenzen $x_1' - x_1 \cdots x_k' - x_k$ dem Betrage nach kleiner als Δ ist" in bekannter Weise* ergiebt.

6. Mit Hilfe des Satzes in Nr. 4 lässt sich der Grenzwerth der in Nr. 3 eingeführten Summe

$$\text{(4)} \qquad \sum_{r=1}^{n} |A_{r-1} A_r|,$$

bei $\lim \delta_r = 0$ im Falle, dass *nicht allein die Functionen* $\phi(t)$, $\psi(t)$ *sondern auch ihre Differentialquotienten* $\phi'(t)$ $\psi'(t)$ *im Intervalle* (α, β) *von* t *überall stetig sind*, unmittelbar bestimmen. Nunmehr ist

$$\text{(5)} \qquad \phi(a_r) - \phi(a_{r-1}) = \phi'(t_r)\,\delta_r, \quad \psi(a_r) - \psi(a_{r-1}) = \psi'(u_r)\,\delta_r,$$

* Vgl. z. B. *Grundzüge* I, S. 357.

wobei $t_r\ u_r$ nicht näher bekannte Werthe innerhalb des Intervalles (a_{r-1}, a_r) bezeichnen. Demnach ist

(6) $$|A_{r-1}A_r| = \sqrt{\phi'(t_r)^2 + \psi'(u_r)^2}\,\delta_r \qquad (r=1, 2, \cdots, n).$$

Nehmen wir jetzt die Function

$$f(x_1, x_2) = \sqrt{\phi'(x_1)^2 + \psi'(x_2)^2}$$

zu Hilfe, welche für jedes Werthsystem $x_1 x_2$ im Bereiche

$$a \leqq x_1 \leqq \beta, \qquad a \leqq x_2 \leqq \beta,$$

stetig ist, so hat nach Nr. 5 die Summe $\sum_r f_r \delta_r$ bei $\lim \delta_r = 0$ einen endlichen Grenzwerth. Er ist nach Nr. 4 das Integral (c) in Nr. 3. Zufolge der Gleichung (6) ist die Summe (4) ein besonderer Fall der soeben aufgestellten Summe $\sum_r f_r \delta_r$; wir finden somit

(7) $$\mathop{\mathrm{L}}_{\delta_r=0} \sum_{r=1}^{n} |A_{r-1}A_r| = \int_a^\beta \sqrt{\phi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\, dt.$$

Das Integral rechts ist demnach in dem hier besprochenen Falle die Länge des durch die Gleichungen (a) dargestellten ebenen Bogens AB.

7. Es ist unerlässlich die Formel (7) mindestens auf den Fall auszudehnen, dass *das Intervall* (a, β) *bloss in eine endliche Anzahl von Theilen zerfällt, in denen jedem sowohl die Function* $\phi'(t)$, *als auch* $\psi'(t)$ *ausnahmslos stetig ist,* während für die Grenzpunkte dieser Theile mindestens eine der Functionen $\phi(t)$, $\psi(t)$ keinen vollständigen Differentialquotienten hat.

Denken wir uns zwischen a und β nacheinander die festen Werthe $\gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_m$ eingeschaltet und nehmen an, dass in den $m+1$ Intervallen $(a, \gamma_1), (\gamma_1, \gamma_2), \cdots, (\gamma_m, \beta)$ von t die beiden Functionen $\phi'(t)$, $\psi'(t)$ allenthalben stetig seien. Es sollen also $\phi'(t)$ und $\psi'(t)$ sowohl bei $\lim t = \gamma_s - 0$, als auch bei $\lim t = \gamma_s + 0$ endliche Grenzwerthe haben, welche aber von einander verschieden sind. Kommen unter den zwischen a und β eingeschalteten Werthen $a_1 \cdots a_n$ stets $\gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_m$ vor, so zerfällt die Summe (4) einfach in $(m+1)$ Glieder, welche den soeben erwähnten Theilen des Intervalles (a, β) entsprechen. Auf jeden von ihnen findet die Formel (7) sinngemässe Anwendung, sodass sich unter dieser besonderen Voraussetzung über die Theilstrecken $\delta_1 \cdots \delta_n$ die Formel ergiebt,

(8) $$\mathop{\mathrm{L}}_{\delta_r=0} \sum_{r=1}^{n} |A_{r-1}A_r| = \sum_{r=0}^{m} \int_{\gamma_r}^{\gamma_{r+1}} \sqrt{\phi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\, dt = \int_a^\beta \sqrt{\phi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\, dt$$
$$(\gamma_0 \equiv a, \ \gamma_{m+1} \equiv \beta).$$

Nun wollen wir auch solche Theilungen $\delta_1 \cdots \delta_n$ von $\beta - a$ berücksichtigen, dass einige oder alle Werthe $\gamma_1 \cdots \gamma_m$ in das Innere von gewissen unter den δ_r

fallen. Ist δ_s eine derartiger Theil, so kann eine oder auch beide Formeln (5) für $r = s$ ihre Giltigkeit verlieren. Man darf jedoch auch jetzt noch

$$\phi(a_s) - \phi(a_{s-1}) = \phi'_s \delta_r, \quad \psi(a_s) - \psi(a_{s-1}) = \psi'_s \delta_r,$$

wo $\phi'_s\ \psi'_s$ Mittelwerthe zwischen den oberen und unteren Grenze von $\phi'(t)$ bezw. $\psi'(t)$ im Intervalle (a_{s-1}, a_s) von t bedeuten, und daher

$$(9) \qquad |A_{s-1}A_s| = \sqrt{\phi'^2_s + \psi'^2_s}\, \delta_s$$

setzen. Doch ist es nicht sicher, ob

$$\sqrt{\phi'^2_s + \psi'^2_s}$$

zwischen der oberen und unteren Grenze der obigen Function $f(x_1, x_2)$ im Bereiche

$$a_{s-1} \leqq x_1 \leqq a_s, \quad a_s \leqq x_2 \leqq a_s$$

liegt. Der Satz in Nr. 4 reicht also für die hier zu Grunde gelegte Annahme über die Functionen $\phi(t)\ \psi(t)$ nicht aus.

8. Man kann indess den Satz in Nr. 4 in der Weise verallgemeinern, dass man an Stelle der dort angebenen Summe

$$\sum_{r=1}^{n} f'_r \delta_r$$

setzt, wobei für alle Werthe von r, denen ein Theil δ_r entspricht, der in seinem Innern einen der Punkte $\gamma_1 \cdots \gamma_m$ nicht enthält, $f'_r = f_r$ zu denken ist, während einem jeden Theil δ_s, zu dessen Innerm ein solcher Werth gehört, eine willkürliche Zahl f'_s zwischen zwei nach Belieben festgesetzten Grenzen zugeordnet werden soll.—Die Gleichung (1*) besteht nämlich noch immer, indem ja x_s von dem im Intervalle (a_{s-1}, a_s) vorkommenden der Werthe $\gamma_1 \cdots \gamma_m$ verschieden gedacht werden kann.

Wir haben also

$$(10) \qquad \mathop{\mathbf{L}}_{\delta_r=0} \sum_{r=1}^{n} f'_r \delta_r = J.$$

Die Summe $\sum f'_r \delta_r$ hat aber bei lim $\delta_r = 0$ sicher einen endlichen Grenzwerth, wenn das nämliche von der in Nr. 4 eingeführten Summe $\sum f_r \delta_r$ gilt, und zwar sind diese beiden Grenzwerthe einander gleich. Wir nehmen also an, dass es eine Zahl J von der Beschaffenheit gebe, dass zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\Delta > 0$ so gehört, dass neben

$$\delta_r < \Delta \ (r = 1 \cdots n) \qquad \text{stets} \qquad \left| \sum_{r=1}^{n} f_r \delta_r - J \right| < \epsilon$$

ist. Nun ist

$$(11)\qquad \sum_{r=1}^{n} f'_r\delta_r - J = \left\{\sum_{r=1}^{n} f_r\delta_r - J\right\} + \sum_s (f'_s - f_s)\,\delta_s,$$

wobei sich die Summe nach s auf die Zeiger derjenigen δ_r bezieht, in denen einer der Werthe $\gamma_1 \cdots \gamma_m$ vorkommt. Jeder zu einer Stelle des Bereiches (1) gehörige Werth von $f(x_1 \cdots x_k)$ liegt zwischen dieselben Zahlen AB, so dass auch $A < f_s < B$ ist. Für die m Werthe f'_s seien die Grenzen A' und B' festgesetzt, es sei also $A' \leqq f'_s \leqq B'$.

Somit ist

$$A' - B < f'_s - f_s < B' - A \qquad \text{d. h.} \qquad |f_s - f'_s| < C,$$

unter C die grössern der Zahlen $|A' - B|$, $|B' - A|$ verstanden. Wir finden also, wenn wir mit δ die grösste unter den Strecken δ_r bezeichnen,

$$\left|\sum_s (f'_s - f_s)\,\delta_s\right| < mC\delta.$$

Lassen wir nun alle Theile δ_r sowohl kleiner als Δ, als auch kleiner als ϵ/mC sein, so ist nach (11) stets

$$\left|\sum_{r=1}^{n} f'_r\delta_r - J\right| < 2\epsilon.$$

d. h. es besteht die Gleichung (10).

9. Wir wollen nun zeigen, dass *die Summe* $\sum_r f_r d_r$ *auch dann bei* $\lim \delta_r = 0$ $(r = 1, \cdots, n)$ *einen endlichen Grenzwerth besitzt, wenn die Function* $f(x_1 \cdots x_k)$ *unbeschadet ihrer Endlichkeit im Bereiche* (1) *bloss bei denjenigen Stellen* $x_1 \cdots x_k$, *zu welchen keiner der Werthe* $\gamma_1 \cdots \gamma_m$ *gehört, stetig ist.*

Zu diesem Behufe haben wir aus den Ergebnissen von No. 5 noch den Satz herzuleiten: „Die Gleichung (3*) gilt sicher, wenn wir jeder vorgegebenen Zahl $\epsilon > 0$ *mindestens eine* Theilung $\delta_1 \cdots \delta_n$ des Unterschiedes $\beta - a$ zuzuweisen vermögen, wofür

$$(12)\qquad 0 \leqq \sum_{r=1}^{n} (g_r - k_r)\,\delta_r < \epsilon$$

ist." Da wir von vorneherein wissen, dass die in (12) stehende Summe bei $\lim \delta_r = 0$ den Grenzwerth $G - K$ hat, so müssen wir nämlich daraus schliessen, dass $0 \leqq G - K \leqq \epsilon$, also da ϵ beliebig ist, dass $G = K$ ist.

Um nun den Beweis des Eingangs der Nr. stehenden Satzes zu liefern, lassen wir zunächst $k = 2$ sein. Der Bereich (1) wird jetzt durch das Quadrat zwischen den Absscissen $x_1 = a$ und $x_1 = \beta$ und den Ordinaten $x_2 = a$, $x_2 = \beta$ dargestellt. Umgeben wir jeden der Punkte $x_1 = \gamma_1, \cdots, x_1 = \gamma_m$ auf der Axe OX_1 mit einer Strecke von der Länge δ, so bleiben von der Strecke $a\beta$ $m + 1$ Theile übrig, wovon keiner einen der soeben erwähnten Punkte enthält. Das-

selbe werde auf der Axe OX_2 vorgenommen. Ziehen wir von den auf diese Weise markirten $2m$ Punkten der Strecke $\alpha\beta$ auf der Axe OX_1 Parallele zur Axe OX_2, und von den $2m$ auf der Axe OX_2 markirten Punkten Parallele zur Axe OX_1, so werden uns dem vorhin genannten Quadrate $(m+1)^2$ Rechtecke ausgeschieden, deren sämmtliche Punkte von $\gamma_1 \cdots \gamma_m$ verschiedene Coordinaten besitzen. Für alle Punkte eines solchen Rechteckes ist demnach die Function $f(x_1, x_2)$ stetig. Somit gehört zu $\epsilon' > 0$ ein $\Delta' > 0$ so dass

$$0 \leqq \sum_r (g_r - k_r)\delta_r < \epsilon'$$

ist, wenn nur die Theile $\delta_1 \delta_2 \cdots$, in welche jede Seite dieses Rechteckes zerlegt ist, sämmtlich kleiner als Δ' sind. Wiederholen wir das an jedem der obigen $(m+1)^2$ Rechtecke, bezeichnen die Theile, in welche die Strecke $\beta - \alpha$ auf die beschriebene Weise getheilt wird, mit $\delta_1 \cdots \delta_n$ und bemerken schliesslich, dass überhaupt $g_r - k_r \leqq B - A$ ist, so finden wir, dass

$$0 \leqq \sum_{r=1}^{n} (g_r - k_r)\delta_r < (m+1)\epsilon' + m(B-A)\delta$$

ist. Bei der Willkürlichkeit von ϵ' und δ stellt uns die rechte Seite dieser Beziehung jede beliebige positive Zahl ϵ vor. Also ist bei der angegebenen Wahl der Theile $\delta_1 \cdots \delta_n$

$$\sum_{r=1}^{n} (g_r - k_r)\delta_r < \epsilon.$$

Damit ist der in Rede stehende Satz für den Fall $k = 2$ gezeigt. Der Beweis für den Fall dass $k > 2$ ist gestaltet sich ganz ähnlich. Jetzt werden aus dem Bereiche (1) $(m+1)^k$ Bereiche ausgeschieden, in ihren jedem alle Stellen von $\gamma_1 \cdots \gamma_m$ verschiedene Coordinaten haben, sodoss $f(x_1 \cdots x_k)$ in jedem solchen Theilbereiche ausnahmslos stetig ist.

10. Wir setzen nun wieder wie in Nr. 6

$$f(x_1, x_2) = \sqrt{\phi'(x_1)^2 + \psi'(x_2)^2}.$$

Um diese Function auch für solche Punkte zu erklären, von deren Coordinaten mindestens eine einen der Werthe $\gamma_1 \cdots \gamma_m$ annimmt, setzen wir fest, dass falls $\phi(t)$ für $t = \gamma_r$ keinen vollständigen Differentialquotienten besitzt, $\phi'(\gamma_r)$ einen mittleren Werth zwischen den Grenzwerthen $\phi'(\gamma_r - 0)$ und $\phi'(\gamma_r + 0)$ bedeute und unter der nämlichen Voraussetzung Aehnliches bezüglich $\psi'(\gamma_r)$ gelte. Da die Functionen $|\phi'(t)|$ und $|\psi'(t)|$ im Intervalle (α, β) von t endliche obere Grenzen g' h' haben sollen, so ist die Function $f(x_1, x_2)$ in dem Quadrate zwischen den Absscissen $x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$ und den Ordinaten $x_2 = \alpha$, $x_2 = \beta$ endlich. In den Punkten, von deren Coordinaten mindestens eine einer der Zahlen $\gamma_1 \cdots \gamma_m$

gleich ist, ist $f(x_1, x_2)$ unstetig. Somit existirt nach No. 9 · lim $\sum_r f_r \delta_r$ für lim $\delta_r = 0 \, (r = 1, \cdots, n)$ und zwar ist nach Nr. 4

$$\mathop{\mathrm{L}}_{\delta_r=0} \sum_{r=1}^{n} f_r \delta_r = \int_a^\beta \sqrt{\phi'(t)^2 + \psi'(t)^2} \, dt.$$

Setzen wir für die Zahlen $f'_s(s = 1, \cdots, m)$ in Nr. 8 die Grenzen 0 und $\sqrt{g'^2 + h'^2}$ fest, so haben wir auch

$$\mathop{\mathrm{L}}_{\delta_r=0} \sum_{r=1}^{n} f'_r \delta_r = \int_a^\beta \sqrt{\phi'(t)^2 + \psi'(t)^2} \, dt.$$

Die Summe auf der linken Seite umfasst zufolge der Formel (9) auch die Summe $\sum_r |A_{r-1}, A_r|$ für den in Rede stehenden Fall. Es ist mithin die Formel (8) in dem Sinne erwiesen, dass *den Theilen* $\delta_1 \cdots \delta_n$ *der Strecke* $\beta - a$ *keine Beschränhung auferlegt zu werden braucht.*

11. *Das Integral einer Function von* $z = x + yi$ *auf dem Wege* $\mathfrak{w}$ *mit der analytischen Darstellung*

$$z = g(t) = \phi(t) + \psi(t) i \qquad (a \leqq t \leqq \beta). \tag{13}$$

C. Jordan hat bemerkt,* dass eine in allen Punkten eines gegebenen Weges längs derselben eindeutige und stetige Function $f(x)$ auf ihm integrirbar ist, *wenn er rectificirbar ist.* Haben die Functionen $\phi(t)$ und $\psi(t)$ die ihnen entweder in No. 6 oder in Nr. 7 beigelegten Eigenschaften, so existirt demnach

$$\int_{(\mathfrak{w})} f(z) \, dz. \tag{14}$$

Im ersteren Falle, dass $\phi'(t)$, $\psi'(t)$ im Intervalle (a, β) von t ausnahmlos stetig sind, kann man dieses Integral leicht in eines nach der reellen Veränderlichen t verwandeln.† Und zwar ist

$$\int_{(\mathfrak{w})} f(z) \, dz = \int_a^\beta f\{g(t)\} g'(t) \, dt. \tag{15}$$

Um diese Formel auch für den zweiten Fall, in welchem der Weg $\mathfrak{w}$, den $m + 1$ Intervallen $(a, \gamma_1) \cdots (\gamma_m, \beta)$ von t entsprechend, in $m + 1$ Stücke $\mathfrak{v}_0$ $\mathfrak{v}_1 \cdots \mathfrak{v}_m$ von der nämlichen Beschaffenheit, wie der ganze Weg $\mathfrak{w}$ in dem ersten Falle, zerfällt, zu beweisen,‡ braucht man nur zu bemerken, dass

---

* *Cours d'Analyse*, 2. éd., I, Nr. 193.

† Vgl. meine *Grundzüge*, II, S. 174.

‡ Der hierfür von mir in den Monatsheften für Mathematik und Physik, Bd. XI, S. 64 gegebene Beweis befriedigt aus einem ähnlichen Grunde nicht ganz, wie die Beziehung (7) in Nr. 2 nicht ausreicht zur Rechtfertigung der Behauptung, dass das Integral (2) (S. 24), die in der Erklärung (D) an die Zahl L gerichtete Forderung erfülle.

$$\int_{(w)} f(z)\, dz = \sum_{r=0}^{m} \int_{(w_r)} f(z)\, dz,$$

ist und auf jedes der Integrale rechts die Formel (15) anzuwenden.

12. Die Rectification der durch die Gleichungen

$$x = \phi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t) \qquad (\alpha \leqq t \leqq \beta)$$

erklärten räumlichen *Curve* kann unter der Voraussetzung, dass diese drei Functionen von t ähnliche Bedingungen, wie die beiden ersteren in Nr. 6 und 7 erfüllen, in der nämlichen Weise durchgeführt werden, wie die der ebenen Curve (a). Hierbei hat man in den Sätzen der Nrn. 4 und 7 $k = 3$ zu setzen.

13. Das im Vorstehenden benutzte Verfahren lässt sich auch auf die Complanation der krummen Flächen ausdehnen, wie wir noch kurz andeuten wollen.

Erklärung des Inhaltes eines begrenzten krummen Flächenstückes $\mathfrak{F}$. Die rechtwinkligen Coordinaten xyz eines beliebigen Punktes desselben seien als Functionen zweier Parameter $u\ v$ dargestellt:

$$x = \phi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v).$$

Dabei soll dadurch, dass den Veränderlichen $u\ v$ ein endliches stetiges Gebiet ϕ in der uv-Ebene angewiesen wird, der Punkt xyz die ganze Fläche $\mathfrak{F}$ einmal beschreiben. Die Kürze wegen nehmen wir an, dass das Gebiet ϕ nur einen und zwar einfachen Rand besitze. Die äussersten Werthe der Absscissen der Randpunkte seien a, a', die äussersten Werthe ihrer Ordinaten β, β'.

Wir theilen die Strecken $a' - a$, $\beta' - \beta$ auf den Axen $v = 0$, $u = 0$ in beliebig viele Theile:

$$a' - a = \delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_m, \quad \beta' - \beta = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \cdots + \epsilon_n,$$

und ziehen durch die Theilpunkte der ersteren, deren Absscissen

$$a_1 = a + \delta_1, \quad a_2 = a_1 + \delta_2 \cdots a' = a_m = a_{m-1} + \delta_m$$

seien, die Parallelen zur v-Axe, durch die Theilpunkte der letzteren, deren Ordinaten

$$\beta_1 = \beta + \epsilon_1, \quad \beta_2 = \beta_1 + \epsilon_2, \quad \cdots, \quad \beta' = \beta_n = \beta_{n-1} + \epsilon_n$$

seien, die Parallelen zur u-Axe, wodurch das Gebiet ϕ mit einem Netz von Rechtecken $\delta_r \epsilon_s$ überzogen wird. Wir setzen

$$\phi(a_r, \beta_s) = x_{rs}, \quad \psi(a_r, \beta_s) = y_{rs}, \quad \chi(a_r, \beta_s) = z_{rs},$$

und nennen den Punkt von $\mathfrak{F}$ mit diesen Coordinaten $M_{r,s}$.

Jedem Rechtecke in der uv-Ebene mit den Ecken

$$(1) \qquad (\alpha_{r-1}, \beta_{s-1}) \quad (\alpha_{r-1}, \beta_s) \quad (\alpha_r, \beta_s) \quad (\alpha_r, \beta_{s-1}),$$

welches bloss aus Punkten von ϕ besteht, entspricht ein windschiefes Viereck, dessen Ecken die Punkte $M_{r-1,s-1}$ $M_{r-1,s}$ $M_{r,s}$ $M_{r,s-1}$ von $\mathfrak{F}$ sind. Wir bilden die Summe der Dreiecksflächen

$$(2) \qquad |M_{r-1,s-1} M_{r-1,s} M_{r,s-1}| + |M_{r,s-1} M_{r-1,s} M_{r,s}|$$

und addiren alle diese Summen, welche den bloss aus Punkten von ϕ bestehenden Rechtecken (1) entsprechen. Wenn die so erhaltene Summe, die wir mit S bezeichnen, bei unbeschränkter und unbegränzter Abnahme der Theile δ_r $(r = 1, \cdots, m)$ und ϵ_s $(s = 1, \cdots, n)$, deren Summen jedoch bezw. $a' - a$ und $\beta' - \beta$ bleiben müssen, einen endlichen Grenzwerth A besitzt, so nennen wir ihn die *Zahl der Fläche* $\mathfrak{F}$ d. h. *es soll jeder positiven Zahl* κ *eine andere solche Zahl* Δ *so entsprechen, dass wenn nur ein jedes* δ_r *und ein jedes* ϵ_s *kleiner als* κ *ist, alsdann stets*

$$(3) \qquad |S - \mathrm{A}| < \kappa$$

ausfällt.

14. Nun mögen die Functionen ϕ, ψ, χ bei jedem Punkte von ϕ stetig sein und zunächst dasselbe auch gelten von allen ihren partiellen Differentialquotienten nach u und v:

$$\frac{\partial \phi}{\partial u} = \phi'_u(u, v), \ \frac{\partial \phi}{\partial v} = \phi'_v(u, v), \ \text{u. s. w.}$$

Setzen wir sodann

$$\frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial \chi}{\partial v} - \frac{\partial \psi}{\partial v}\frac{\partial \chi}{\partial u} = J, \quad \frac{\partial \chi}{\partial u}\frac{\partial \phi}{\partial v} - \frac{\partial \chi}{\partial v}\frac{\partial \phi}{\partial u} = K, \quad \frac{\partial \phi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \phi}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial u} = L,$$

so ist *die Zahl der Fläche* $\mathfrak{F}$ *das Doppelintegral*

$$(4) \qquad \int\int_{(\phi)} \sqrt{J^2 + K^2 + L^2}\, du\, dv.$$

Um diesen Satz zu zeigen, berechne man zuerst die Summe (2). Verstehen wir unter M M' M'' M''' bezw. die den Werthsystemen

$$(u, v), \quad (u, v + \epsilon), \quad (u + \delta, v), \quad (u + \delta, v + \epsilon),$$

entsprechenden Punkte von $\mathfrak{F}$ und setzen

$$\psi'_u(u'', v)\, \chi'_v(u, v''') - \psi'_v(u, v'')\, \chi'_u(u''', v) = J_1,$$
$$\chi'_u(u''', v)\, \phi'_v(u, v') - \chi'_v(u, v''')\, \phi'_u(u', v) = K_1,$$
$$\phi'_u(u', v)\, \psi'_v(u, v'') - \phi'_v(u, v')\, \psi'_u(u'', v) = L_1,$$

und ähnlich

$$\psi'_u(u''_1, v+\epsilon)\chi'_v(u+\delta, v'''_1) - \psi'_v(u+\delta, v''_1)\chi'_u(u'''_1, v+\epsilon) = J_2,$$

u. s. w., so ist

$$(5)\quad |MM'M''| + |M''M'M'''| = \tfrac{1}{2}\{\sqrt{J_1^2+K_1^2+L_1^2} + \sqrt{J_2^2+K_2^2+L_2^2}\}\,\delta\epsilon.$$

Dabei bedeuten $u'\ u''\ u'''\ u'_1\ u''_1\ u'''_1$ nicht näher bekannte Werthe zwischen u und $u+\delta$, $v'\ v''$ u. s. w. eben solche Werthe zwischen v und $v+\epsilon$. In (5) hat man, um die Zahl (2) zu erhalten, $u=\alpha_{r-1}$, $v=\beta_{s-1}$, $\delta=\delta_r$, $\epsilon=\epsilon_s$ zu setzen.

Dass dann die oben eingeführte Summe S bei $\lim \delta_r = 0$ $(r=1, \cdots, m)$ und $\lim \epsilon_s = 0$ $(s=1, \cdots, n)$ das Doppelintegral (4) zum Grenzwerthe hat, kann mit Hilfe eines Satzes nachgewiesen werden, welcher als eine Verallgemeinung des Satzes in Nr. 4 erscheint. Er lautet:

„Es sei

$$(6)\qquad f(x_1\cdots x_k, y_1\cdots y_k)$$

ein für jedes System $x_1\cdots x_k, y_1\cdots y_k$, wovon jedes Paar $x_1y_1\cdots x_k\,y_k$ dem Bereiche ϕ angehört, eindeutige und für diesen Bereich endliche Function. Versteht man dann unter $f_{r,s}$ einen beliebigen Werth im Intervalle, welches gebildet wird von der oberen und unteren Grenze der Function (6), während $x_1y_1\cdots x_ky_k$ beliebige Punkte des Rechtecks (1) sein dürfen, und hat die Summe $\sum f_{rs}\delta_r\epsilon_s$, erstreckt über alle Rechtecke (1), welche bloss aus Punkten von ϕ bestehen, bei $\lim \delta_r = 0$ $(r=1, \cdots, m)$ und $\lim \epsilon_s = 0$ $(s=1, \cdots, n)$ einen endlichen Grenzwerth J, so lässt die Function

$$f(u\cdots u, u\cdots v)$$

ein eigentliches Doppelintegral über das Gebiet ϕ zu und zwar ist

$$\int\int_{(\phi)} f(u\cdots u, v\cdots v)\,du\,dv = J."$$

Durch eine ähnliche Betrachtung wie in Nr. 5 lässt sich zeigen, dass die Summe $\sum f_{rs}\delta_r\epsilon_s$ bei $\lim \delta_r = 0$ und $\lim \epsilon_s = 0$ einen endlichen Grenzwerth besitzt, wenn die Function (6) an allen Stellen $x_1\cdots x_k, y_1\cdots y_k$, wobei ein jedes Paar $x_1y_1\cdots x_ky_k$ einen Punkt von ϕ bezeichnet, stetig ist.

Aus dem Vorstehenden ergiebt sich endlich die Existenz des in Nr. 13 erwähnten Grenzwerthes von S indem man als Function (6) den Ausdruck

$$\sqrt{J_1^2+K_1^2+L_1^2}$$

wählt, darin $u\ u'\ u''\ u'''$ bezw. durch $x_1x_2x_3x_4$, $v\,v'\,v''\,v'''$ bezw. durch $y_1y_2y_3y_4$ ersetzend. Alsdann wird

$$f(u\cdots u, v\cdots v) = \sqrt{J^2+K^2+L^2}.$$

15. Der in der letzten Nr. angeführte Satz wird durch Ueberlegungen ähnlicher Art, wie sie in Nr. 8 und 9 angestellt wurden, ausgedehnt auf den Fall dass *die sechs partiellen Differentialquotienten* $\partial\phi/\partial u$, $\partial\phi/\partial v$ u. s. w. *im Gebiete* ϕ *endlich und in allen Punkten desselben mit Ausnahme einer endlichen Anzahl von einzelnen Punkten und derer einer endlichen Anzahl von gewöhnlichen* * *Linien stetig sind.* Der hier angedeutete Beweis des solchergestalt erweiterter Satzes ist meines Erachtens allein völlig befriedigend.

* Vgl. meine *Grundzüge*, III, S. 37.